EJERCICIOS PROPUESTOS

CURSO DE ANÁLISIS COMPLEJO

5-Octubre-2007 (VARIABLE COMPLEJA/EjAMII/EjerPrII3.tex)

Capítulo 3.

Propiedades locales de las funciones holomorfas.

pp. 111 - 140

3.2.2. Ejercicios Propuestos (p. 117)

Ejerc. 118 - 123

Ejercicio Propuesto 118.
En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f holomorfa en un entorno del origen, verificando que $f(\frac{1}{n}) = a_n$ para todo número natural n suficientemente grande:

a) $a_{2n} = 0$, $a_{2n-1} = 1$.

b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \frac{1}{2n}$.

c) $a_n = \frac{n}{n+1}$.

Solución.

a) Una función f definida en un entorno del origen verificando que $f(\frac{1}{2n}) = 0$ y $f(\frac{1}{2n-1}) = 1$ para todo número natural n suficientemente grande no es ni siquiera continua.

b) Si una función f es holomorfa en un entorno del origen y verifica que $f(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n}$ para todo número natural n suficientemente grande, entonces por el principio de identidad se tiene que $f(z) = z$. Si además f verifica que $f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{2n}$ para todo número natural n suficientemente grande, puesto que

$$f(\frac{1}{2n-1}) = \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n-1+1} = \frac{\frac{1}{2n-1}}{1+\frac{1}{2n-1}},$$

de nuevo por el principio de identidad se tiene que $f(z) = \frac{z}{1+z}$. En consecuencia no puede existir una tal función f.

c) Si una función f es holomorfa en un entorno del origen y verifica que $f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1}$ para todo número natural n suficientemente grande, puesto que

$$f(\frac{1}{n}) = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

por el principio de identidad se tiene que $f(z) = \frac{1}{1+z}$. Ciertamente, la función $\frac{1}{1+z}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{-1\}$. ■

Ejercicio Propuesto 119.
Sea f una función entera tal que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$. Prueba que $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Solución.
Considérese la función entera f^* definida por

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}.$$

(Ver ejercicio resuelto número 27.) Como $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$, se sigue que

$$f^*(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Luego la función entera $f^* - f$ se anula en $\mathbb{R}$, y por el principio de identidad $f^* - f = 0$. Por tanto

$$\overline{f(\overline{z})} = f(z),$$

equivalentemente

$$f(\overline{z}) = \overline{f(z)}.$$

.

■

Ejercicio Propuesto 120.
Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$. Justifica que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en Ω es un dominio de integridad, es decir, no tiene divisores de cero.

Solución.
Se ha de probar que

$$f, g \in \mathcal{H}(\Omega) \quad : \quad fg = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0 \ \text{ o } \ g = 0.$$

Supongamos que f no es idénticamente nula y fijemos $a \in \Omega$ tal que $f(a) \neq 0$. Puesto que Ω es abierto y f es continua en a, podemos tomar $R > 0$ tal que

$$D(a, R) \subseteq \Omega \ \text{ y } \ f(z) \neq 0, \quad \forall z \in D(a, R).$$

Como $fg = 0$ se sigue entonces que

$$g(z) = 0, \quad \forall z \in D(a, R).$$

Por el principio de identidad se tiene entonces que $g = 0$. ■

Ejercicio Propuesto 121.
Sean f y g funciones holomorfas en un dominio Ω. Supongamos que hay una sucesión $\{a_n\}$ de puntos de Ω que converge a un punto $a \in \Omega$ con

$$a_n \neq a \quad y \quad f'(a_n)g(a_n) = g'(a_n)f(a_n) \quad \textit{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que las funciones f y g son linealmente dependientes.

Solución.
Si $f = 0$ o $g = 0$, claramente son linealmente dependientes. Supongamos por tanto que ambas son no idénticamente nulas. Por el principio de identidad,

$$f'(z)g(z) = g'(z)f(z), \quad \forall z \in \Omega.$$

Fijemos $z_0 \in \Omega$ tal que $g(z_0) \neq 0$, y fijemos $\rho > 0$ tal que

$$D(z_0, \rho) \subseteq \Omega \;\; \text{y} \;\; g(z) \neq 0, \quad \forall z \in D(z_0, \rho).$$

Entonces $\frac{f}{g} \in \mathcal{H}(D(z_0, \rho))$ y para todo $z \in D(z_0, \rho)$ se verifica que

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2} = 0.$$

Luego existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $f = \lambda g$ en $D(z_0, \rho)$. De nuevo por el principio de identidad, $f = \lambda g$ en Ω. ■

Ejercicio Propuesto 122.
Sea f una función holomorfa en el disco unidad verificando que $f(0) = 0$. Prueba que la serie $\sum_{n \geq 1} f(z^n)$ converge en el disco unidad y que su suma es una función holomorfa en dicho disco.

Solución.
Veamos que la serie converge uniformemente en los compactos del disco unidad. Para ello bastará ver que converge uniformemente en los discos $\overline{D}(0, \rho)$ con $0 < \rho < 1$. Como $f(0) = 0$ se tiene que $f(z) = zg(z)$ con g una función holomorfa en el disco unidad. Para cada $0 < \rho < 1$ consideremos

$$M(\rho) := max\,\{\mid g(z) \mid : \mid z \mid \leq \rho\}.$$

Fijado un tal ρ, se tiene que

$$\mid f(z^n) \mid = \mid z^n g(z^n) \mid \leq M(\rho)\rho^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \;\; \text{y} \;\; \forall z \in \mathbb{C} : \mid z \mid \leq \rho.$$

Como la serie numérica $\sum_{n\geq 1} M(\rho)\rho^n = M(\rho)\sum_{n\geq 1}\rho^n$ es converge, por el Criterio de la mayorante de Weierstrass, la serie $\sum_{n\geq 1} f(z^n)$ converge uniformemente en $\overline{D}(0,\rho)$. Variando ρ obtenemos que la serie converge en el disco unidad. Finalmente, por el Teorema de Weierstrass, la función suma de la serie es una función holomorfa en el disco unidad. ■

Ejercicio Propuesto 123.
Da un ejemplo de dos funciones holomorfas en un dominio acotado que coincidan en infinitos puntos del mismo y no sean idénticas. Considera también el caso de que el dominio no sea acotado.

Solución.
Las funciones $f(z) = 0$ y $g(z) = sen\, \frac{1}{1-z}$ son holomorfas en el disco unidad y no idénticas pese a que coinciden en el conjunto infinito

$$\left\{ \frac{n\pi - 1}{n\pi} \,:\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Las funciones $f(z) = 0$ y $g(z) = sen\, z$ son enteras y no idénticas pese a que coinciden en el conjunto infinito $\pi\mathbb{Z}$. ■

3.4.2. Ejercicios Propuestos (pp. 139-140)

Ejerc. 124 - 140

Ejercicio Propuesto 124.
Sea f una función holomorfa no constante en el disco $D(a,R)$. Para $0 < r < R$ definamos

$$M(r) = \max\{| f(z) | : | z-a |= r\} \quad y \quad A(r) = \max\{Re\, f(z) \ : | z-a |= r\}.$$

Prueba que las funciones $r \mapsto M(r)$ y $r \mapsto A(r)$ son estrictamente crecientes. Si se supone que f es una función entera no constante, entonces

$$\lim_{r\to+\infty} M(r) = \lim_{r\to+\infty} A(r) = +\infty.$$

Solución.
Sean $0 < r < s < R$. Por el principio del módulo máximo $M(r)$ no puede ser un máximo de $| f |$ en el disco $D(a,s)$, por lo que

$$M(r) = \max\{| f(z) | : | z-a |= r\} < \max\{| f(z) | : | z-a |\leq s\} =$$

$$\max\{| f(z) | : | z-a |= s\} = M(s).$$

Ya que $Re\, f$ es armónica, en virtud del principio de extremo para funciones armónicas, $A(r)$ no puede ser un máximo de $Re\, f$ en $D(a,s)$, por lo que será

$$A(r) = \max\{Re\, f(z) \ : | z-a |= r\} < \max\{Re\, f(z) \ : | z-a |\leq s\} =$$

$$\max\{Re\, f(z) \ : | z-a |= s\} = A(r).$$

Supuesto que f es entera no constante, por ser las funciones M y A estrictamente crecientes, ha de existir el límite de ambas (bien sea finito o infinito) en $+\infty$. Si fuese $\lim_{r\to+\infty} M(r) < +\infty$, entonces f estaría acotada, y por tanto (por el Teorema de Liouville) sería constante. Así pues,

$$\lim_{r\to+\infty} M(r) = +\infty.$$

Si fuese $\lim_{r\to+\infty} A(r) < +\infty$, entonces $Re\, f$ estaría acotada, y por tanto f sería constante (consecuencia del hecho de que para toda función entera no constante se verifica que $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$). Así pues,

$$\lim_{r\to+\infty} A(r) = +\infty.$$

■

Ejercicio Propuesto 125.
Sea Ω un dominio acotado del plano y $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω. Prueba que si $\{f_n\}$ converge uniformemente en la frontera de Ω, también converge uniformemente en $\overline{\Omega}$.

Solución.
Dados $p, q \in \mathbb{N}$ sabemos que

$$\max\{| f_p(z) - f_q(z) | : z \in Fr(\Omega)\} = \max\{| f_p(z) - f_q(z) | : z \in \Omega\}.$$

Supuesto que $\{f_n\}$ converge uniformemente en la frontera de Ω, se sigue que $\{f_n\}$ satisface la condición de Cauchy uniforme en la frontera de Ω. Por lo anterior, $\{f_n\}$ satisface la condición de Cauchy uniforme en $\overline{\Omega}$, y por tanto $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$. ■

Ejercicio Propuesto 126.
Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos del plano, $g : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ continua con $g(\Omega_1) \subseteq \Omega_2$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ tal que $f'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \Omega_2$. Prueba que si $f \circ g$ es holomorfa en Ω_1 también lo es g.

Solución.
Dado $a \in \Omega_1$, como $f'(g(a)) \neq 0$, por el Teorema de inversión local aplicado a f en el punto $g(a)$, existe un abierto U con $g(a) \in U \subseteq \Omega_2$ tal que

1) f es inyectiva en U y $V := f(U)$ es abierto,

2) $f_{|U} : U \to V$ es biholomorfa.

Consideremos
$$W := g^{-1}(U) = \{z \in \Omega_1 \, : \, g(z) \in U\}.$$

Puesto que g es continua, se tiene que W es abierto. Además, es claro que $a \in W \subseteq \Omega_1$.

Por hipótesis $h := f \circ g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. Es claro que $h_{|W} = f_{|U} \circ g_{|W}$. Luego $g_{|W} = (f_{|U})^{-1} \circ h_{|W}$. Así, por la regla de la cadena, $g_{|W}$ es derivable en a. Finalmente, en vista del carácter local de la derivabilidad, se concluye que $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.

Fijemos $a \in \Omega_1$. Si g es constante en un entorno de a, claramente g es derivable en a. Supongamos que g no es constante en ningún entorno de a. Por el Principio de Identidad podemos tomar $\rho > 0$ tal que

$$D(a,\rho) \subseteq \Omega_1 \text{ y } g(z) \neq g(a), \quad \forall z \in D(a,\rho).$$

Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $D(a,\rho)$ convergente hacia a y con $z_n \neq a, \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se tiene entonces que $g(z_n) \neq g(a), \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Además, como g es continua, $\{g(z_n)\}$ converge a $g(a)$, y como f es derivable en $g(a)$ se tiene que

$$\lim \frac{f(g(z_n)) - f(g(a))}{g(z_n) - g(a)} = f'(g(a)).$$

Como $f'(g(a)) \neq 0$, existe un número natural m tal que para $n \geq m$ se verifica que

$$\frac{f(g(z_n)) - f(g(a))}{g(z_n) - g(a)} \neq 0.$$

Ahora notemos que para $n \geq m$ se verifica que

$$\frac{g(z_n) - g(a)}{z_n - a} = \frac{1}{\frac{f(g(z_n)) - f(g(a))}{g(z_n) - g(a)}} \, \frac{f(g(z_n)) - f(g(a))}{z_n - a},$$

y por tanto

$$\lim \frac{g(z_n) - g(a)}{z_n - a} = \frac{1}{f'(g(a))} \, (f \circ g)'(a).$$

En conclusión, g es derivable en a, y además

$$g'(a) = \frac{(f \circ g)'(a)}{f'(g(a))}.$$

■

Ejercicio Propuesto 127.
Sea f una función entera tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para $\mid z \mid = 1$. Prueba que f es constante.

Solución.
La función $\mathbb{C} \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$z \mapsto \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

es holomorfa. Por hipótesis, para todo $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$ se verifica que

$$f(z) = \overline{f(z)} = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Luego, por el principio de identidad

$$f(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

En consecuencia,

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{\lim_{z\to\infty} f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{f(0)}.$$

Por tanto, f está acotada, y por el Teorema de Liouville, f es constante.

De otra manera:

Consideremos las funciones

$$u(z) = Imf(z), \ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

y

$$v(z) = 0, \ \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

u y v son funciones armónicas en $D(0,1)$ y continuas en $\overline{D}(0,1)$. Nótese que

$$u(z) = v(z), \ \ \forall z \in Fr(D(0,1)) \ \Rightarrow \ u(z) = v(z), \ \ \forall z \in \overline{D}(0,1) \ \Rightarrow$$

$$Imf(z) = 0, \ \ \forall z \in D(0,1) \ \Rightarrow f \ \text{ es constante en } \ D(0,1).$$

Finalmente, por el Principio de Identidad, f es constante en $\mathbb{C}$.

■

Nota: Este ejercicio también es consecuencia del ejercicio que viene a continuación. A saber, tomando $g = f$ en $\overline{D}(0,1)$, obtenemos que f es constante en $\overline{D}(0,1)$, y por el Principio de identidad, f es constante.

Ejercicio Propuesto 128.
Sean $f, g : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfas en el disco unidad abierto y continuas en el disco unidad cerrado. Se supone que para $\mid z \mid = 1$ se verifica que $g(z) = \overline{f(z)}$. Prueba que f y g son constantes.

Solución.
Como $g(z) = \overline{f(z)}$ en $C(0,1)$, se tiene que

$$Re\, g = Re\, f \ \text{ y } \ Im\, g = -Im\, f \ \text{ en } \ C(0,1),$$

esto es

$$Re\,(g - f) = 0 \ \text{ y } \ Im\,(g + f) = 0 \ \text{ en } \ C(0,1).$$

Por el Corolario 3.23,

$$Re\,(g - f) = 0 \ \text{ y } \ Im\,(g + f) = 0 \ \text{ en } \ \overline{D}(0,1),$$

y por tanto

$$Re\, g = Re\, g \ \text{ y } \ Im\, g = -\,Im\, f \ \text{ en } \ \overline{D}(0,1),$$

y en consecuencia

$$\overline{f(z)} = g(z) \ \text{ en } \ \overline{D}(0,1).$$

Como $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $\overline{f} = g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, se sigue que f es constante, y por tanto también g es constante. ■

Ejercicio Propuesto 129.
Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*)$ tal que

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

Prueba que f tiene un cero en $\mathbb{C}^*$.

Solución.
Si f no se anula en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{0\})$. Como $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ se tiene que

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

y por el Teorema de Riemann, $\frac{1}{f}$ puede verse como una función entera. Además, por ser $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, se sigue que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

de donde se sigue que $\frac{1}{f}$ está acotada. Por el Teorema de Liouville, $\frac{1}{f}$ es constante, y por tanto f es constante. Pero entonces no ocurrir que

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$

De otra manera

Si $f(1) = 0$ hemos acabado. Supongamos que $f(1) \neq 0$, y llamemos $\alpha = |f(1)|$. Como

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to \infty} f(z) = \infty$$

podemos afirmar que

$$\exists r > 0 \text{ tal que } |f(z)| > \alpha + 1, \quad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : |z| < r$$

y

$$\exists R > 0 \text{ tal que } |f(z)| > \alpha + 1, \quad \forall z : |z| > R.$$

Luego f alcanza su mínimo absoluto en el anillo $\overline{A}(0; r, R)$.

Puesto que f no puede ser constante, por el Principio del módulo mínimo, f debe tener ceros en dicho anillo.

$\blacksquare$

Ejercicio Propuesto 130.
Justifica que no puede existir una función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ tal que para todo w con $| w |= 1$ se tenga

$$\lim_{z \to w} f(z) = \infty.$$

Solución.
Supongamos que existe una tal función y lleguemos a una contradicción. Supongamos que existe una tal función f y veamos que podemos suponer que el conjunto $Z(f)$ de los ceros de f es vacío. Supuesto que $Z(f) \neq \emptyset$, de la condición

$$\forall w \ : | w |= 1 \ \text{ se verifica } \ \lim_{z \to w} f(z) = \infty \tag{1}$$

se deduce que $Z(f)$ no puede acumularse en $\overline{D}(0,1)$, y por tanto es finito.

A saber, si $Z(f)$ se acumulase en $D(0,1)$, entonces por el principio de identidad f sería constantemente 0, lo que es contrario a la condición

(1). Mientras que si $Z(f)$ se acumula en algún $w_0 \in C(0,1)$, entonces $\lim_{z\to w_0} f(z) \neq \infty$, lo que de nuevo contradice (1).

Así pues,

$$Z(f) = \{a_1, ..., a_n\},$$

y por tanto podemos escribir

$$f(z) = (z-a_1)^{k_1}...(z-a_n)^{k_n} g(z), \qquad \forall z \in D(0,1),$$

donde $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $Z(g) = \emptyset$. Claramente la condición (1) se transfiere a g, esto es,

$$\forall w \ : \mid w \mid = 1 \ \text{ se verifica } \ \lim_{z\to w} g(z) = \infty.$$

En conclusión, podemos suponer la existencia de una función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ verificando (1) y con $Z(f) = \emptyset$.

Entonces la función

$$\frac{1}{f} : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es holomorfa, y verifica que

$$\lim_{z\to w} \frac{1}{f(z)} = 0 \ \ \forall w \ : \ |w| = 1.$$

Por el Principio del módulo máximo se tiene que $\frac{1}{f} = 0$, lo que es imposible.

■

Ejercicio Propuesto 131.

Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y verificando que $\mid f(z^2) \mid \geq \mid f(z) \mid$ para todo $z \in D(0,1)$. Prueba que f es constante.

Solución.

Dado $z \in D(0,1)$, la sucesión $\{z^{2^{n-1}}\} \longrightarrow 0$ y la sucesión imagen es creciente en módulo

$$|f(z)| \leq |f(z^2)| \leq |f(z^4)| \leq .....$$

Como f es continua en 0 se tiene que

$$\{f(z^{2^{n-1}})\} \longrightarrow f(0),$$

y por la continuidad del módulo

$$\{|f(z^{2^{n-1}})|\} \longrightarrow |f(0)|.$$

Luego
$$|f(z)| \leq |f(0)|.$$
Por el principio del módulo máximo, f es constante.

■

Ejercicio Propuesto 132.
¿Verdadero o falso?

a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $Re(f)$ está acotada, entonces f es constante.

b) Si $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ y $Re(f)$ está acotada, entonces f está acotada.

Solución.
a) Verdadero, por el Corolario 2.24.

b) Falso. Por ejemplo la función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$ definida por
$$f(z) = i\,log\,(1+z) = i\,(log\ \mid 1+z \mid + i\,arg\,(1+z)) =$$
$$-arg\,(1+z) + i\,log\ \mid 1+z \mid$$
tiene parte real acotada
$$Re\,f(z) = -arg\,(1+z) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
y sin embargo f no está acotada, ya que
$$\lim_{\substack{z\to -1\\ z\in\mathbb{R}\cap D(0,1)}} f(z) = \lim_{x\to -1} i\ \log(1+x) = \infty.$$

■

Ejercicio Propuesto 133.
Describir las funciones f holomorfas en $\mathbb{C}^*$ que verifican $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $\mid f(z) \mid= 1$ siempre que $\mid z \mid= 1$.

Solución.
Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}^*$ verificando que $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$ y $\mid f(z) \mid= 1$ siempre que $\mid z \mid= 1$.

Para cada z con $|z| = 1$ se tiene que

$$1 = |f(z)|^2 = f(z)\,\overline{f(z)} = f(z)\,\overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Por consiguiente

$$f(z)\,g(z) = 1, \quad \forall z \in C(0,1),$$

donde $g : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ es la función holomorfa definida por

$$g(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$

Por el principio de identidad se sigue que

$$f(z)\,g(z) = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

de donde se deduce que ambas f y g no se anulan en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Además,

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(z)} = 0,$$

y por tanto g puede verse como una función entera cuyo único cero es 0. Luego, existen $n \in \mathbb{N}$ y φ función entera sin ceros tales que

$$g(z) = z^n \varphi(z).$$

Puesto que φ no se anula en el disco unidad y

$$1 =| f(z)g(z) |=| f(z)z^n\varphi(z) |=| \varphi(z) |, \qquad \forall z \in C(0,1)$$

se sigue, del Corolario a los Principios del módulo máximo y mínimo, que φ es constante en $\overline{D}(0,1)$, y por el Principio de Identidad, φ es constante en $\mathbb{C}$ (obligadamente, dicha constante tiene módulo 1). Luego, existe $\beta \in \mathbb{C}$ con $| \beta |= 1$ tal que $f(z)z^n\beta = 1$. Esto es, considerando $\alpha = \beta^{-1}$, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ con $| \alpha |= 1$ tal que

$$f(z) = \frac{\alpha}{z^n}, \qquad \forall z \in\in \mathbb{C}.$$

■

Ejercicio Propuesto 134.
Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : | Re\, z |< 1, \quad | Im\, z |< 1\}$ *y* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *una función*

continua en $\overline{\Omega}$ *y holomorfa en* Ω *verificando que* $f(z) = 0$ *siempre que* $z \in \overline{\Omega}$ *y* $Re\, z = 1$. *Prueba que* $f(z) = 0$ *para todo* $z \in \overline{\Omega}$.
Sugerencia: *considera la función* $g(z) = f(z)f(iz)f(-z)f(-iz)$.

Solución.
Consideremos la función $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = f(z)f(iz)f(-z)f(-iz).$$

Es claro que g es continua en $\overline{\Omega}$, g es holomorfa en Ω, y $g(z) = 0, \quad \forall z \in Fr(\Omega)$. Por el principio del módulo máximo tenemos que

$$g(z) = 0, \quad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

Por el ejercicio propuesto 120 se sigue que

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega$$

ó

$$f(iz) = 0, \quad \forall z \in \Omega$$

ó

$$f(-z) = 0, \quad \forall z \in \Omega$$

ó

$$f(-iz) = 0, \quad \forall z \in \Omega$$

En cualquier caso:

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in \Omega.$$

Finalmente, por continuidad

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

■

Ejercicio Propuesto 135.
Sea f *una función polinómica de grado* $n \geq 1$. *Supongamos que* $| f(z) | \leq 1$ *siempre que* $| z | = 1$. *Pruébese que* $| f(z) | \leq | z |^n$ *siempre que* $| z | \geq 1$.

Solución.
Supongamos que

$$f(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \quad (a_n \neq 0),$$

y notemos que para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$

$$\frac{f(z)}{z^n} = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + ... + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n,$$

y por tanto

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_n$$

Consideremos la función $g : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{cases} g(z) = z^n f(\frac{1}{z}) & si \quad z \neq 0 \\ g(0) = a_n \end{cases}$$

Claramente $g \in \mathcal{H}(D(0,1)\backslash\{0\})$. Además g es continua en $D(0,1)$ ya que

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} z^n f(\frac{1}{z}) = \lim_{z\to 0} \frac{f(\frac{1}{z})}{(\frac{1}{z})^n} = \lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_n.$$

Por el Teorema de Riemann $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$. Puesto que para cada z con $|z| = 1$, también $|\frac{1}{z}| = 1$, se sigue que

$$|g(z)| = |z^n f\left(\frac{1}{z}\right)| = |z|^n |f\left(\frac{1}{z}\right)| \leq 1.$$

Por el Principio del módulo máximo

$$|g(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \overline{D}(0,1).$$

Luego

$$|z|^n \, |f\left(\frac{1}{z}\right)| \leq 1, \quad \forall z \in \overline{D}(0,1)\backslash\{0\},$$

y por tanto

$$|f(\frac{1}{z})| \leq |\frac{1}{z}|^n, \quad \forall z \in \overline{D}(0,1)\backslash\{0\},$$

o lo que es lo mismo

$$|f(z)| \leq |z|^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \, : \, |z| \geq 1.$$

■

Ejercicio Propuesto 136.
Sea f una función entera acotada en el conjunto de puntos $(\mathbb{R}+i\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}+i\mathbb{R})$. Justifica que f es constante.

Solución.
Sea $M > 0$ tal que

$$| f(z) |\leq M, \quad \forall z \in (\mathbb{R}+i\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}+i\mathbb{R}).$$

Para $m, n \in \mathbb{Z}$ consideremos el cuadrado

$$C_{m,n} := [m, m+1] + i[n, n+1].$$

Puesto que $Fr(C_{m,n}) \subseteq (\mathbb{R}+i\mathbb{Z})\cup(\mathbb{Z}+i\mathbb{R})$, por el principio del módulo máximo se sigue que

$$| f(z) |\leq M, \quad \forall z \in C_{m,n}.$$

Puesto que

$$\mathbb{C} = \bigcup_{m,n\in\mathbb{N}} C_{m,n}$$

se sigue que f está acotada por M. Por el Teorema de Liouville, f es constante. ■

Ejercicio Propuesto 137.
Sea f una función entera no constante. Dado $\rho > 0$, definamos:

$$E_\rho = \{z \in \mathbb{C} : | f(z) |< \rho\} \quad y \quad F_\rho = \{z \in \mathbb{C} : | f(z) |\leq \rho\}.$$

a) Prueba que la adherencia de E_ρ es igual a F_ρ.

b) Justifica que en cada componente conexa acotada de E_ρ hay por lo menos un cero de f.

Solución.
a) Claramente

$$E_\rho = f^{-1}(D(0,\rho))$$

es un abierto contenido en

$$F_\rho = f^{-1}(\overline{D}(0,\rho))$$

que es un cerrado. Veamos que la inclusión $\overline{E_\rho} \subseteq F_\rho$ no puede ser estricta. En efecto, si existiese $a \in F_\rho \backslash \overline{E_\rho}$, entonces existiría $R > 0$ tal que

$$D(a, R) \cap E_\rho = \emptyset,$$

y por tanto

$$\mid f(z) \mid \geq \rho, \quad \forall z \in D(a, R).$$

Ya que $a \in F_\rho$, se sigue que

$$\mid f(a) \mid = \rho \leq \mid f(z) \mid, \quad \forall z \in D(a, R).$$

Entonces, por el principio del módulo mínimo, f sería constante en $D(a, R)$, y por el principio de identidad, f sería constante en $\mathbb{C}$, en contra de la hipótesis.

b) Cada componente conexa acotada de E_ρ es un dominio acotado cuya frontera está contenida en F_ρ, y por tanto $\mid f \mid$ es constantemente ρ en la frontera. Por el Corolario 3.13.c) se sigue que hay por lo menos un cero de f en cada componente conexa acotada. ■

Ejercicio Propuesto 138.
Sea $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mid z \mid > 1\}$, *y* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ *una función continua en* $\overline{\Omega}$, *holomorfa en* Ω *y que tiene límite finito en infinito. Justifica que la función* $\mid f \mid$ *alcanza un máximo absoluto en un punto de la circunferencia unidad y que, si* f *no es constante, la función* φ *definida para todo* $r > 1$ *por*

$$\varphi(r) = \max\{\mid f(z) \mid : \mid z \mid = r\}$$

es estrictamente decreciente.

Solución.
Si

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \alpha,$$

entonces consideramos la función $g : \overline{D}(0, 1) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{cases} g(z) = f(\frac{1}{z}) & si \quad z \neq 0 \\ g(0) = \alpha \end{cases}$$

Claramente $g \in \mathcal{H}(D(0,1)\backslash\{0\})$. Además g es continua en $\overline{D}(0,1)$ ya que

$$\lim_{z\to 0} g(z) = \lim_{z\to 0} f(\frac{1}{z}) = \lim_{z\to\infty} f(z) = \alpha.$$

Por el Teorema de Riemann $g \in \mathcal{H}(D(0,1))$, y por el principio del módulo máximo $\mid g \mid$ alcanza su máximo absoluto en $C(0,1)$. Luego $\mid f \mid$ alcanza su máximo absoluto en $C(0,1)$.

Supongamos ahora que f es no constante, por lo que también g es no constante. Si consideramos la aplicación $M :]0,1[\to \mathbb{R}$ definida para todo $0 < r < 1$ por

$$M(r) = \max\{\mid g(z) \mid : \mid z \mid = r\}$$

sabemos por el ejercicio resuelto 83 que M es estrictamente creciente. Puesto que

$$\varphi(r) = M(\frac{1}{r}), \quad \forall r > 1$$

se sigue que φ es estrictamente decreciente. ■

Ejercicio Propuesto 139.
Sea Ω un abierto del plano, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $z_0 \in \Omega$. Prueba que en cualquier entorno de z_0 hay puntos a, b tales que

$$f'(z_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Solución.
Consideremos la función $F : \Omega \to \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = f(z) - zf'(z_0)$$

Es claro que $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F'(z) = f'(z) - f'(z_0), \;\; \forall z \in \Omega$. Luego $F'(z_0) = 0$. Por el Corolario 3.35, F no es inyectiva en ningún entorno de z_0. Luego, en cualquier entorno de z_0 existen dos puntos distintos a, b tales que $F(a) = F(b)$, esto es

$$f(a) - af'(z_0) = f(b) - bf'(z_0),$$

o lo que es lo mismo

$$f'(z_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Ejercicio Propuesto 140.
Sea f holomorfa en un abierto Ω, $a \in \Omega$ y $f'(a) \neq 0$. Prueba que, para $r > 0$ suficientemente pequeño, se verifica que

$$\frac{2\pi i}{f'(a)} = \int_{C(a,r)} \frac{1}{f(w) - f(a)}\, dw.$$

Solución.
Como $f'(a) \neq 0$, por el Corolario 3.35, f es inyectiva en un entorno de a. Fijemos $\rho > 0$ tal que f es inyectiva en $D(a, \rho)$, y consideremos la función $h : D(a, \rho) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\begin{cases} h(z) = \frac{z-a}{f(z)-f(a)} & si \quad z \neq a \\ h(a) = \frac{1}{f'(a)} \end{cases}$$

Claramente h es holomorfa en $D(a, \rho)\backslash\{a\}$ y continua en $D(a, \rho)$, luego, por el Teorema de Riemann, $f \in \mathcal{H}(D(a, \rho))$. Ahora, por la fórmula de Cauchy para la circunferencia tenemos que para todo r con $0 < r < \rho$ se verifica que

$$h(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{h(z)}{z-a}\, dz,$$

esto es

$$\frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{dz}{f(z) - f(a)}.$$

■